**III. Знайти обернену матрицю методом Гаусса та за допомогою розширеної**

**матриці**

(Варіант 1)

**Теорія**

Нехай дано матрицю *A* наступного виду:Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса

для якої потрібно знайти обернену [методом Гаусса](http://www.mathros.net.ua/?p=226) (оберненою називається матриця, при множенні на яку вихідна матриця перетворюється на одиничну, тобто Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса). Суть даного методу полягає у наступному: якщо взяти одиничну матрицю *E*і провести над нею елементарні перетворення, які приводять матрицю *A* до одиничної, то в результаті матриця *E* перетвориться на обернену до *A.*

Розглянемо процес приведення матриці *А*до одиничної більш детально.

**Прямий хід:** помножимо перший рядок матриці *А* на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса, в результаті отримаємо матрицю в якої елемент Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса. Далі, від елементів другого рядка віднімаємо відповідні елементи першого рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса, від елементів, третього віднімаємо елементи першого рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса і так далі. На *n*-у кроці від елементів *n-*го рядка віднімаємо елементи першого, помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса. Після чого матриця *А* набуде вигляду:

Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса

На наступному кроці помножимо всі елементи другого рядка на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса. І  від елементів *3,4,...,n*-го рядка віднімаємо елементи другого помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса відповідно. Так всі елементи другого стовпця матриці *А*, починаючи з третього, стануть рівними нулю, а елемент Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса буде рівним одиниці.

obernena_matricag121

І так далі продовжуємо даний процес, поки всі елементи головної діагоналі матриці *А*не стануть рівними одиниці, а всі елементи нижче діагоналі не стануть рівними нулю.

Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса

**Обернений хід**(суть оберненого ходу полягає в тому, щоб всі елементи вище головної діагоналі стали також рівними нулю)**:** перетворимо матрицю *A* так, щоб всі елементи *n*-го стовбця стали рівними нулю крім елемента Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса. Щоб цього досягнути, від елементів *(n-1)*-го рядка віднімаємо елементи *n*-го рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса, від елементів *(n-2)*-го рядка віднімаємо елементи *n*-го рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса, ... , від елементів першого рядка віднімаємо елементи *n*-го рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса.

Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса

Далі перетворимо матрицю *А* так, щоб всі елементи *(n-1)*-го стовбця крім Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса стали рівними нулю. Тобто, від елементів*(n-3)*-го рядка віднімаємо елементи *(n-1)*-го рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса, від елементів *(n-4)*-го рядка віднімаємо елементи *(n-1)*-го рядка помножені на Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці методом Гаусса і так далі до першого рядка включно.

Продовжуючи аналогічні дії ми отримаємо одиничну матрицю.

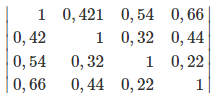
**III. Знайти обернену матрицю методом Гаусса та за допомогою розширеної**

**матриці.**

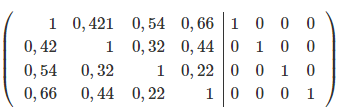
(Варіант 1)

**Рішення**

**Вихідна матриця:**

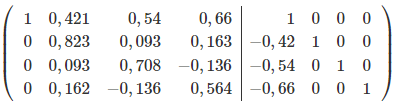


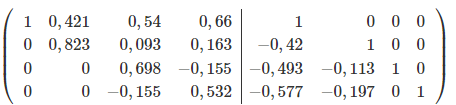
**Запишемо матрицю в вид:**

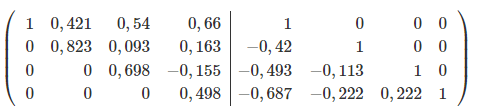


**Працюємо зі столбцем №1**

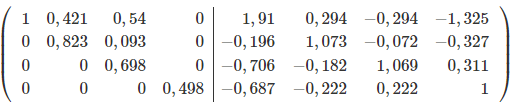
Щоб зробити нулі під елементом a11, віднімемо 1-у рядок з усіх рядків, що розташовані нижче її, при чому поділимо кожну з цих рядків на a11

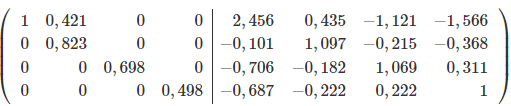


Щоб зробити нулі під елементом a22, віднімемо 2-у рядок з усіх рядків, що розташовані нижче її, при чому поділимо кожну з цих рядків на a22

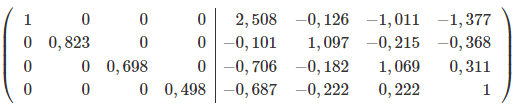
Щоб зробити нулі під елементом a33, віднімемо 3-ій рядок з усіх рядків, що розташовані нижче її, при чому поділимо кожну з цих рядків на a33:

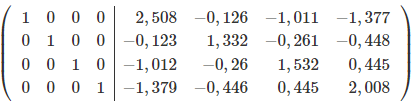
Щоб зробити нулі під елементом a44, віднімемо 4-у рядок з усіх рядків, що розташовані нижче її, при чому поділимо кожну з цих рядків на a44:

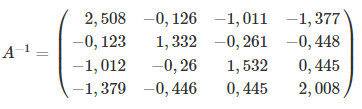


Щоб зробити нулі під елементом a33, віднімемо 3-й рядок з усіх рядків, що розташовані вище її, при чому поділимо кожну з цих рядків на a33:

Щоб зробити нулі під елементом a22, віднімемо 2-й рядок з усіх рядків, що розташовані вище її, при чому поділимо кожну з цих рядків на a22:



Поділимо кожен рядок на елемент, який стоїть на головній діагоналі:

Зворотня матриця:

**Протокол рішення в Scilab**

disp('Обратная матрица методом Гаусса')

A=[1 0.421 0.454 0.66;

0.42 1 0.32 0.44;

0.54 0.32 1 0.2;

0.66 0.44, 0.22, 1];

B= [1 0 0 0;

0 1 0 0;

0 0 1 0;

0 0 0 1];

disp(A,'Имеем исходную матрицу:')

AB = [A B];

disp(AB,'Дополним её единичной матрицей:')

for i=1:size(AB, 'r')

disp('Делим строку №'+string(i)+' на '+string(AB(i,i))+':')

AB(i,:)=AB(i,:)/AB(i,i)

disp(AB(i,:))

for j=1:size(AB, 'r')

if j==i then continue; end

disp('домножим строку №'+string(i)+' на '+string(-AB(j,i))+' и сложим со строкой №'+string(j))

AB(j,:)=-AB(j,i)\*AB(i,:)+AB(j,:)

disp(AB(j,:))

end

disp(AB,'Дополненная матрица после преобразований:')

end

disp(AB(:,5:8),"Обратная матрица:")

disp(inv(A),'Проверим при помощи встроенной функции обратной матрицы - inv:')

**Вивід в консоль:**

Делим строку №1 на 1:

AB =

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

0.42 1. 0.32 0.44 0. 1. 0. 0.

0.54 0.32 1. 0.2 0. 0. 1. 0.

0.66 0.44 0.22 1. 0. 0. 0. 1.

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

домножим строку №1 на -0.42 и сложим со строкой №2

AB =

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

0. 0.82318 0.12932 0.1628 -0.42 1. 0. 0.

0.54 0.32 1. 0.2 0. 0. 1. 0.

0.66 0.44 0.22 1. 0. 0. 0. 1.

0. 0.82318 0.12932 0.1628 -0.42 1. 0. 0.

домножим строку №1 на -0.54 и сложим со строкой №3

AB =

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

0. 0.82318 0.12932 0.1628 -0.42 1. 0. 0.

0. 0.09266 0.75484 -0.1564 -0.54 0. 1. 0.

0.66 0.44 0.22 1. 0. 0. 0. 1.

0. 0.09266 0.75484 -0.1564 -0.54 0. 1. 0.

домножим строку №1 на -0.66 и сложим со строкой №4

AB =

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

0. 0.82318 0.12932 0.1628 -0.42 1. 0. 0.

0. 0.09266 0.75484 -0.1564 -0.54 0. 1. 0.

0. 0.16214 -0.07964 0.5644 -0.66 0. 0. 1.

0. 0.16214 -0.07964 0.5644 -0.66 0. 0. 1.

Дополненная матрица после преобразований:

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

0. 0.82318 0.12932 0.1628 -0.42 1. 0. 0.

0. 0.09266 0.75484 -0.1564 -0.54 0. 1. 0.

0. 0.16214 -0.07964 0.5644 -0.66 0. 0. 1.

Делим строку №2 на 0.82318:

AB =

1. 0.421 0.454 0.66 1. 0. 0. 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0.09266 0.75484 -0.1564 -0.54 0. 1. 0.

0. 0.16214 -0.07964 0.5644 -0.66 0. 0. 1.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

домножим строку №2 на -0.421 и сложим со строкой №1

AB =

1. 0. 0.3878617 0.576739 1.2148011 -0.5114313 0. 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0.09266 0.75484 -0.1564 -0.54 0. 1. 0.

0. 0.16214 -0.07964 0.5644 -0.66 0. 0. 1.

1. 0. 0.3878617 0.576739 1.2148011 -0.5114313 0. 0.

домножим строку №2 на -0.09266 и сложим со строкой №3

AB =

1. 0. 0.3878617 0.576739 1.2148011 -0.5114313 0. 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0. 0.7402833 -0.1747253 -0.4927233 -0.1125635 1. 0.

0. 0.16214 -0.07964 0.5644 -0.66 0. 0. 1.

0. 0. 0.7402833 -0.1747253 -0.4927233 -0.1125635 1. 0.

домножим строку №2 на -0.16214 и сложим со строкой №4

AB =

1. 0. 0.3878617 0.576739 1.2148011 -0.5114313 0. 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0. 0.7402833 -0.1747253 -0.4927233 -0.1125635 1. 0.

0. 0. -0.1051119 0.5323336 -0.5772735 -0.1969679 0. 1.

0. 0. -0.1051119 0.5323336 -0.5772735 -0.1969679 0. 1.

Дополненная матрица после преобразований:

1. 0. 0.3878617 0.576739 1.2148011 -0.5114313 0. 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0. 0.7402833 -0.1747253 -0.4927233 -0.1125635 1. 0.

0. 0. -0.1051119 0.5323336 -0.5772735 -0.1969679 0. 1.

Делим строку №3 на 0.7402833:

AB =

1. 0. 0.3878617 0.576739 1.2148011 -0.5114313 0. 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. -0.1051119 0.5323336 -0.5772735 -0.1969679 0. 1.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

домножим строку №3 на -0.3878617 и сложим со строкой №1

AB =

1. 0. 0. 0.668284 1.4729571 -0.4524551 -0.5239369 0.

0. 1. 0.1570981 0.1977696 -0.5102165 1.2148011 0. 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. -0.1051119 0.5323336 -0.5772735 -0.1969679 0. 1.

1. 0. 0. 0.668284 1.4729571 -0.4524551 -0.5239369 0.

домножим строку №3 на -0.1570981 и сложим со строкой №2

AB =

1. 0. 0. 0.668284 1.4729571 -0.4524551 -0.5239369 0.

0. 1. 0. 0.2348487 -0.4056539 1.2386886 -0.2122135 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. -0.1051119 0.5323336 -0.5772735 -0.1969679 0. 1.

0. 1. 0. 0.2348487 -0.4056539 1.2386886 -0.2122135 0.

домножим строку №3 на 0.1051119 и сложим со строкой №4

AB =

1. 0. 0. 0.668284 1.4729571 -0.4524551 -0.5239369 0.

0. 1. 0. 0.2348487 -0.4056539 1.2386886 -0.2122135 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. 0. 0.5075246 -0.6472347 -0.2129506 0.1419887 1.

0. 0. 0. 0.5075246 -0.6472347 -0.2129506 0.1419887 1.

Дополненная матрица после преобразований:

1. 0. 0. 0.668284 1.4729571 -0.4524551 -0.5239369 0.

0. 1. 0. 0.2348487 -0.4056539 1.2386886 -0.2122135 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. 0. 0.5075246 -0.6472347 -0.2129506 0.1419887 1.

Делим строку №4 на 0.5075246:

AB =

1. 0. 0. 0.668284 1.4729571 -0.4524551 -0.5239369 0.

0. 1. 0. 0.2348487 -0.4056539 1.2386886 -0.2122135 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. 0. 1. -1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

0. 0. 0. 1. -1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

домножим строку №4 на -0.6682840 и сложим со строкой №1

AB =

1. 0. 0. 0. 2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

0. 1. 0. 0.2348487 -0.4056539 1.2386886 -0.2122135 0.

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. 0. 1. -1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

1. 0. 0. 0. 2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

домножим строку №4 на -0.2348487 и сложим со строкой №2

AB =

1. 0. 0. 0. 2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

0. 1. 0. 0. -0.1061567 1.337228 -0.2779164 -0.4627336

0. 0. 1. -0.236025 -0.6655875 -0.1520546 1.3508342 0.

0. 0. 0. 1. -1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

0. 1. 0. 0. -0.1061567 1.337228 -0.2779164 -0.4627336

домножим строку №4 на 0.2360250 и сложим со строкой №3

AB =

1. 0. 0. 0. 2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

0. 1. 0. 0. -0.1061567 1.337228 -0.2779164 -0.4627336

0. 0. 1. 0. -0.9665848 -0.2510875 1.4168663 0.4650513

0. 0. 0. 1. -1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

0. 0. 1. 0. -0.9665848 -0.2510875 1.4168663 0.4650513

Дополненная матрица после преобразований:

1. 0. 0. 0. 2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

0. 1. 0. 0. -0.1061567 1.337228 -0.2779164 -0.4627336

0. 0. 1. 0. -0.9665848 -0.2510875 1.4168663 0.4650513

0. 0. 0. 1. -1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

--> disp(AB(:,5:8),"Обратная матрица:")

Обратная матрица:

2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

-0.1061567 1.337228 -0.2779164 -0.4627336

-0.9665848 -0.2510875 1.4168663 0.4650513

-1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478

--> disp(inv(A),'Проверим при помощи встроенной функции обратной матрицы - inv:')

Проверим при помощи встроенной функции обратной матрицы - inv:

2.3252046 -0.172052 -0.7109008 -1.316752

-0.1061567 1.337228 -0.2779164 -0.4627336

-0.9665848 -0.2510875 1.4168663 0.4650513

-1.2752774 -0.4195868 0.2797672 1.9703478